

מתמטיקה למדעי הטבע

פרק 43 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציית חזקה עם מעיריך רצionarioלי

תוכן העניינים

1	הנגזרת של פונקציית חזקה עם מעיריך רצionarioלי
4	שימושי הנגזרת
6	חקירה של פונקציית חזקה

הנגזרת של פונקציה חזקה עם מעיריך רצionarioלי:

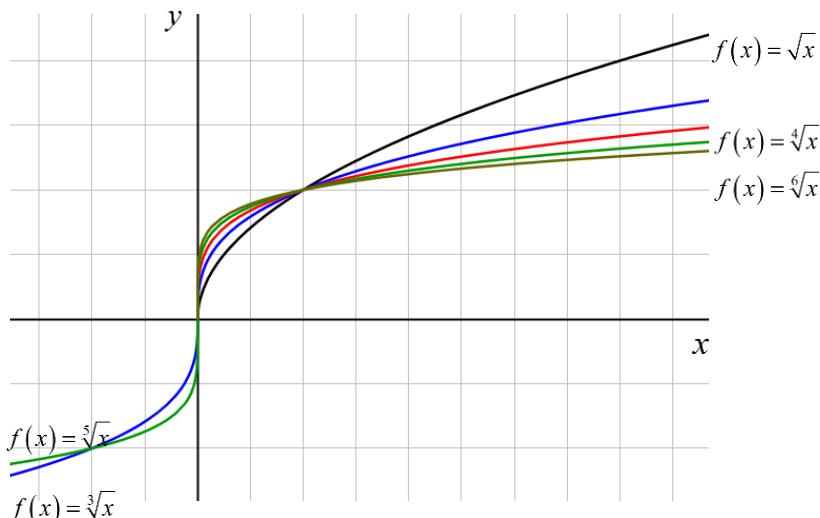
סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

הצורה הכללית של פונקציה חזקה עם מעיריך רצionarioלי : $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$

$$\text{תזכורת : } \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

להלן מספר דוגמאות לפונקציה מהצורה : $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$



תכונות כלליות:

1. **פונקציית חזקה :** $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ מוגדרת לכל x עבור : n אי-זוגgi

ומוגדרת לכל $x \geq 0$ עבור n זוגgi.

2. **הפונקציה :** $f(x) = (ax+b)^{\frac{m}{n}}$ מוגדרת לכל x עבור : n אי-זוגgi ולכל $\frac{b}{a} \geq -\infty$ עבור n זוגgi.

נזרת של פונקציה חזקה:

הנגזרת	הפונקציה
$y' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$	$y = x^{\frac{m}{n}}$
$y' = a \cdot \frac{m}{n} (ax+b)^{\frac{m}{n}-1}$	$y = (ax+b)^{\frac{m}{n}}$

שאלות:

(1) כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$y = \sqrt[8]{2-3x}$.
ד.

$y = \sqrt[3]{x+1}$.
ג.

$y = \sqrt[7]{x}$.
ב.

$y = \sqrt[4]{x}$.
א.

$y = \frac{x^2 - 2x}{\sqrt[20]{(2x-4)^3}}$.
ט.

$y = \frac{3x}{\sqrt[3]{3x+7}}$.
ו.

$y = \frac{1}{\sqrt[7]{x}}$.
ז.

$y = \frac{1}{\sqrt[6]{x}}$.
ח.

(2) גוזר את הפונקציות הבאות:

$y = 27 - \sqrt[3]{x+1}$.
ב.

$y = 4x + \sqrt[4]{x}$.
א.

$y = (3-x^3) \cdot \sqrt[6]{x}$.
ד.

$y = (x+2)^2 \cdot \sqrt[3]{x}$.
ג.

$y = \sqrt[10]{(8-7x)^7}$.
ו.

$y = \sqrt[3]{(3x+1)^5}$.
ח.

$y = x^3 \cdot \sqrt[7]{1-x}$.
ט.

$y = (x^2 - 4) \cdot \sqrt[8]{(4x+3)^3}$.
ז.

$y = \frac{2}{\sqrt[7]{(4-3x)^4}}$.
ו.

$y = \frac{6}{\sqrt[5]{x+2}}$.
ט.

(3) גוזר פעמיים את הפונקציות הבאות:

$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$.
ב.

$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.
א.

$f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x)$.
ג.

תשובות סופיות:

$$x \leq \frac{2}{3} . \text{ג}$$

ג. כל x ב. כל x א. $x \geq 0$ (1)

$$x > 2 . \text{ד}$$

$$x \neq -\frac{7}{3} . \text{ה}$$

$$x \neq 0 . \text{ו}$$

$$x > 0 . \text{ח}$$

$$y' = \frac{(x+2)(7x+2)}{3\sqrt[3]{x^2}} . \text{ז} \quad y' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} . \text{ב} \quad y' = 4 + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} . \text{א} \quad (2)$$

$$y' = -\frac{49}{10\sqrt[10]{(8-7x)^3}} . \text{י} \quad y' = 5\sqrt[3]{(3x+1)^2} . \text{ט} \quad y' = \frac{3-19x^3}{6\sqrt[6]{x^5}} . \text{ט}$$

$$y' = -\frac{6}{5\sqrt[5]{(x+2)^6}} . \text{ט} \quad y' = \frac{21x^2 - 22x^3}{7\sqrt[7]{(1-x)^6}} . \text{ט} \quad y' = \frac{9.5x^2 + 6x - 6}{\sqrt[8]{(4x+3)^5}} . \text{ו}$$

$$y' = \frac{24}{7\sqrt[7]{(4-3x)^{11}}} . \text{ז}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}} . \text{א} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{x^2+3}{(x^2-1)^{5/3}} . \text{ב}$$

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}} . \text{ז}$$

שימושי הנגזרת:

שאלות:

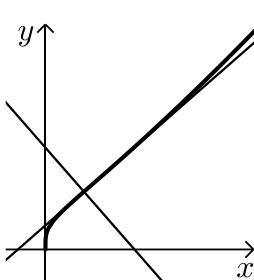
4) לפניך מספר פונקציות.

מצא את ערך הנגזרת של הפונקציה בנקודת המצוינת לידיה :

$$y = 2x + \sqrt[3]{3x-1} ; x=3$$

$$y = \frac{10}{\sqrt[5]{x^4}} ; x=1$$

5) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה : $y = \sqrt[4]{6-x} - x$ בנקודת שבה : $x=-10$.

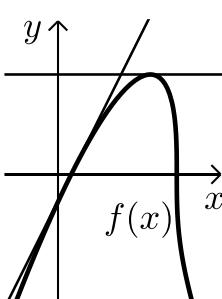


6) באIOR שלפניך נתונה הפונקציה הבאה : $f(x) = (2x+4) \cdot \sqrt[4]{x}$

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך $(1,6)$.

ב. מצא את משוואת הנורמל לפונקציה בנקודת $(1,6)$.

ג. חשב את השטח הנוצר ע"י שני הישרים והצירים.



7) באIOR שלפניך מתואר הגרף של הפונקציה : $f(x) = (x-1) \cdot \sqrt[3]{9-x}$

א. מצא נקודת על הפונקציה ששיעור המשיק העובר דרך הוא 0.

ב. כתוב את משוואת המשיק העובר דרך נקודת שמצויה בסעיף הקודם.

ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x . הקロבה יותר לראשית.

ד. חשב את שטח המשולש הנוצר בין שני המשיקים שמצויה וציר ה- y .

8) נתונה הפונקציה הבאה : $f(x) = \sqrt[4]{2x+7} - Ax^2$, (A פרמטר).

ידוע כי שיעור המשיק לגרף הפונקציה בנקודת שבה : $x=4.5$ הוא : $m = -\frac{1}{2}$.
מצא את A .

9) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt[5]{1-x}}{Ax+B}$ A, B פרמטרים. משווה את המשיק לגרף הפונקציה דרך הנקודה $x=2$ היא: $45y = 2x - 19$. מצא את A ואת B .

תשובות סופיות:

$$\text{ב. } 2.25 \quad \text{א. } -8 \quad \text{(4)}$$

$$\cdot y = -\frac{33}{32}x + 1\frac{11}{16} \leftarrow 33x + 32y - 54 = 0 \quad \text{(5)}$$

$$\text{ג. } 67.25 \quad \text{ב. } y = -\frac{2}{7}x + 6\frac{2}{7} \quad \text{א. } y = 3.5x + 2.5 \quad \text{(6)}$$

$$\text{ד. } 22.84 \quad \text{ג. } y = 2x - 2 \quad \text{ב. } y = 6\sqrt[3]{2} \quad \text{א. } (7, 6\sqrt[3]{2}) \quad \text{(7)}$$

$$A = \frac{1}{16} \quad \text{(8)}$$

$$A = B = 1 \quad \text{(9)}$$

חקירה של פונקציה חזקה:

שאלות:

10) חקרו את הפונקציה: $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 36}$ לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה.
- ב. מציאות נקודות חיתוך עם הצירים.
- ג. מציאות נקודות קיצון מקומיות (פנימיות) וקצת וקביעת סוגן.
- ד. מציאות תחומי העליה והירידה.
- ה. מציאות אסימפטוטות אנכיות.
- ו. סרטוט סקיצה.

11) חקרו את הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt[5]{8x-2}}{x^2+1}$ לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה.
- ב. מציאות נקודות חיתוך עם הצירים.
- ג. מציאות נקודות קיצון מקומיות (פנימיות) וקצת וקביעת סוגן.
- ד. מציאות תחומי העליה והירידה.
- ה. מציאות אסימפטוטות אנכיות.
- ו. סרטוט סקיצה.

12) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 6$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ג. הוכח כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
- ד. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = -f(x)$.
- �. בבע לגביו כל טענה האם היא נכונה או שגויה. נמק.
- ו. לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
- ii. שתי הפונקציות חותכות את הצירים באותו הנקודות.
- iii. שתי הפונקציות עלות בכל תחום הגדרתן.

13) נתונה הפונקציה : $f(x) = x^3 + k\sqrt[3]{x} + 8$, k פרמטר.

- ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה : $x = -2.741$.
- ממצא את ערך הפרמטר k , על מספר שלם.
 - הראה כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת גם היא על ציר ה- x .
 - כתב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - העזר בסקיצה וקבע כמה פתרונות יהיו למשוואת הבאה : $x^3 - 9\sqrt[3]{x} = 8$.

14) נתונות הפונקציות הבאות : $g(x) = \sqrt[5]{2x+2.6}$, $f(x) = (x-2)^2$.

- ממצא את נקודות החיתוך של הפונקציות עם ציר ה- x .
- מגדירים פונקציה חדשה : $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.
- כתב מפורשות את הפונקציה $h(x)$ ואת תחום הגדרתה.
- ממצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$.
- המצא עבור אלו ערכי k יחתוך הישר $y = k$ את גרף הפונקציה ב-3 נקודות שונות.

15) נתונה הפונקציה הבאה : $f(x) = \frac{5x^2 - 66x - 440}{\sqrt[6]{x}}$.

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
האם יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית?
- האם הפונקציה חותכת את הצירים בתחום : $[0:18]$? נמק ע"י חישוב.
- ממצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מגדירים פונקציה נוספת $g(x)$ המקיים : $g(x) = -f(x)$.
- לפניך מספר טענות המתיחסות לפונקציה $g(x)$. קבע אלו מהטענות הבאות נכונות ואלו שגויות. נמק ע"י הסבר או חישוב מתאים.
 - $g(x)$ חיובית בכל תחום $[0:18]$.
 - $f(x) - g(x)$ אותן נקודות קיצון (אותם שיעוריים והואו סוג) כמו $f(x) + g(x)$.
 - ל- $f(x) - g(x)$ אותו תחום הגדרה כמו ל- $f(x) + g(x)$.

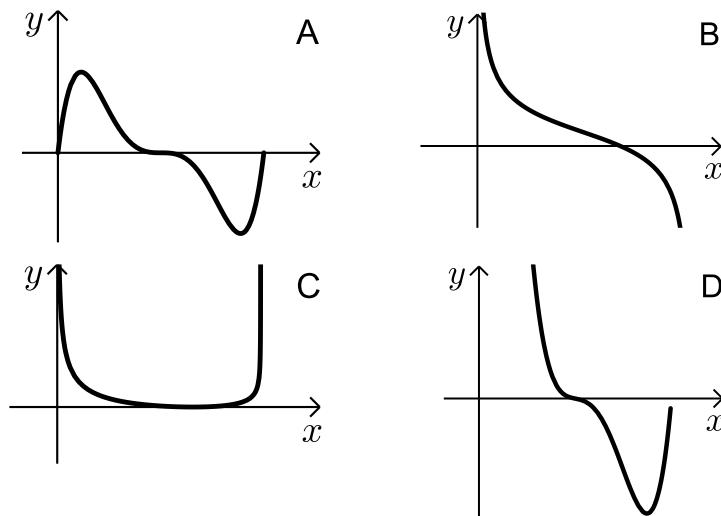
16) נתונה הפונקציה הבאה : $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{9-x}$.

- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיות וקצה) וקבע את סוגן.
- כתב את תחומי העלילה והירידה של הפונקציה.
- על סמך הסעיפים הקודמים קבע כמה פתרונות יש למשוואה הבאה : $\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{9-x} = k$

$$k = -2 \quad .i$$

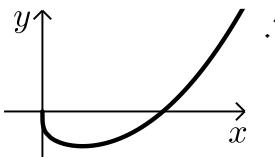
$$k = 1 \quad .ii$$

- קבע איזה מבין הגרפים הבאים (A-D) מתאר את הנגזרת של הפונקציה.
- נמק.



תשובות סופיות:

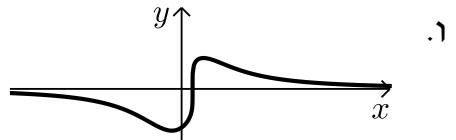
10 א. $x \geq 0$ ב. $(0,0), (6,0)$ ג. $\min(2, -38)$ ד. יורדת: $x > 2$, $0 < x < 2$, עולה: $x < 0$



ה. אין.

11 א. כל x ב. $(0, -1.14), (0.25, 0)$ ג. $\min\left(-\frac{2}{9}, -1.24\right), \max(0.5, 0.91)$ ד. יורדת: $x < -\frac{2}{9}$, $x > \frac{1}{2}$

ה. אין ג. הנגזרת: $f'(x) = \frac{1+2\sqrt[6]{x}}{6x^{5/6}} > 0$ ד. יורדת: $x < -\frac{2}{9}, x > \frac{1}{2}$



12 א. $x \geq 0$ ב. $(0, -6), (64, 0)$ ג. $f(x) = \frac{1+2\sqrt[6]{x}}{6x^{5/6}}$ ד. לא נכון, החיתוך עם ציר ה- y שונה.

ה. נכון ו. לא נכון, החיתוך עם ציר ה- y שונה.

13 א. $k = -9$ ב. $\min(1, 0), \max(-1, 16)$ ג. עולה: $x < -1, x > 1$ ד. יורדת: $-1 < x < 1$

ב. $h(x) = (x-2)^2 \sqrt[5]{2x+2.6}$ ג. $\min(2, 0), \max(-1, 8.126)$ ד. $h(x) = kx^2 + 2x + 2.6$

ה. לא ג. אסימפטוטה אנכית: $x = 0, x > 0$

ו. נכון ד. לא נכון, אסימפטוטה אנכית: $x = 0, x > 0$

ז. נכון ג. $\min(4, -495.27), \max(2, -491.77)$ ד. לא נכון, אסימפטוטה אנכית: $x = 0, x > 0$

ה. נכון ג. $0 \leq x \leq 9$ ב. $\min(0, 0), \max(6, 3.22)$ ד. $\min(9, 0)$ קצה.

ו. יורדת: $0 < x < 9$, $k = -2$.i.e. אין פתרון. ג. עולה: $6 < x < 9$, $k = 1$ שני פתרונות.

ח. B. ד. $k = 1$ שני פתרונות.

סקיצות לשאלות: